

Ad-Soyad :

Numara :

Cevap Anahtarı

MAT 104 Lineer Cebir II Ara Sınav Soruları

30.04.2021

Not: Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır. Çözümlerinizi ayrıntılı olarak yazınız. Mümkünse cevaplarınızı PDF dosyasına dönüştürerek gönderiniz. Derste öğrendiğiniz yöntemler dışında yapacağınız çözümler kabul edilmeyecektir. Başarılar dilerim.

1) Aşağıdaki soruları yanında bulunan parantez içine doğru ise “D”, yanlış ise “Y” yazarak cevaplayınız.

(D) F bir cisim olmak üzere $m \times n$ tipindeki matrisler kümesi F_n^m , F cismi üzerinde vektör uzayıdır.

(Y) $A: V \rightarrow W$ lineer dönüşüm olmak üzere $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subset V$ lineer bağımsız ise $\{A(\alpha_1), A(\alpha_2), \dots, A(\alpha_n)\} \subset W$ lineer bağımsızdır.

(D) Her lineer dönüşüme bir matris, her matrise bir lineer dönüşüm karşılık gelir.

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi bir eşelon matristir.

(Y) Her matris birim matrise denktir.

2) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ olsun.

a) $BC = CB$ olup olmadığını inceleyiniz.

b) $A^t(B+C) = ?$

3) $\begin{cases} 2x + 4y - 3z = 3 \\ x + 3y - 5z = -2 \\ 3x + 6y - 5z = 4 \end{cases}$ lineer denklem sistemini elementer satır operasyonları ile çözünüz.

4) $A: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $A(x, y, z, t) = (3x - y, 2y - 2z, z - 3t)$ lineer dönüşümü veriliyor.

a) $\text{çek}A = ?$

b) $\text{rank}A = ?$

c) A'yı matris biçiminde yazınız.

5) Eğer varsa $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini elementer satır operasyonları ile belirleyiniz.

$$2) \left. \begin{aligned} a) BC &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-4+6 & 5+4 & 2+4+8 \\ 3-1+15 & 15+10 & 6+1+20 \\ -1+12 & -5+8 & -2+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 14 \\ 17 & 25 & 27 \\ 11 & 3 & 14 \end{bmatrix} \\ CB &= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+15-2 & 4+5 & 2+25+8 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 9 & 35 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} BC \neq CB$$

$$b) A^t(B+C) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 6 & 28 & 14 \\ 6 & 4 & 20 \end{bmatrix}$$

$$3) \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -5 & -2 \\ 3 & 6 & -5 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-2s_2+s_1 \\ -3s_2+s_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & -3 & 10 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & -2 & 7 & 7 \\ 0 & -3 & 10 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}s_2} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -7/2 & -7/2 \\ 0 & -3 & 10 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-3s_1+s_2 \\ 3s_2+s_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11/2 & 17/2 \\ 0 & 1 & -7/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \end{array} \right] \xrightarrow{-2s_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11/2 & 17/2 \\ 0 & 1 & -7/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-\frac{11}{2}s_3+s_1 \\ \frac{7}{2}s_3+s_2}} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow x=3, y=0, z=1$$

$$4) a) \text{gek} A = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : A(x, y, t, t) = 0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \} \\ = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : (3x-y, 2y-2z, z-3t) = (0, 0, 0) \}$$

$$\begin{aligned} 3x-y &= 0 & x &= \frac{y}{3} & x &= t \\ 2y-2z &= 0 & y &= z & y &= 3t \\ z-3t &= 0 & z &= 3t & z &= 3t \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{gek} A = \{ (t, 3t, 3t, t) : t \in \mathbb{R} \} = \text{sp} \{ (1, 3, 3, 1) \}$$

$$b) \text{boy} \mathbb{R}^4 = \text{rank} A + \text{sifirlik} A \Rightarrow 4 = \text{rank} A + \text{boy gek} A \\ \Rightarrow \text{rank} A = 4 - \text{boy gek} A = 4 - 1 = 3$$

$$c) \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x-y \\ 2y-2z \\ z-3t \end{bmatrix}$$

$$5) \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-3s_1+s_2 \\ s_1+s_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-s_2 \\ \frac{1}{2}s_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{s_2+s_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-5s_3+s_2 \\ -7s_3+s_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1 & -7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array} \right] \\ \underbrace{\quad \quad \quad}_{I_3} \quad \quad \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{A^{-1}}$$